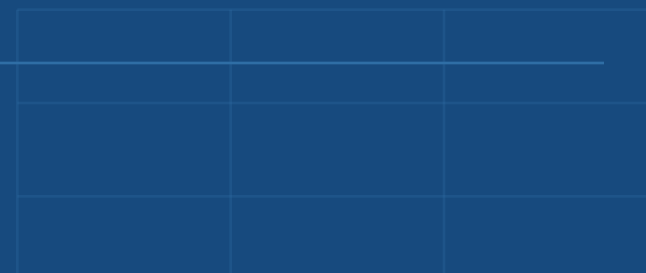


第2章 指标记法与符号系统

连续介质力学的数学语法

徐翱 景泽 编著

张量分析与连续介质力学



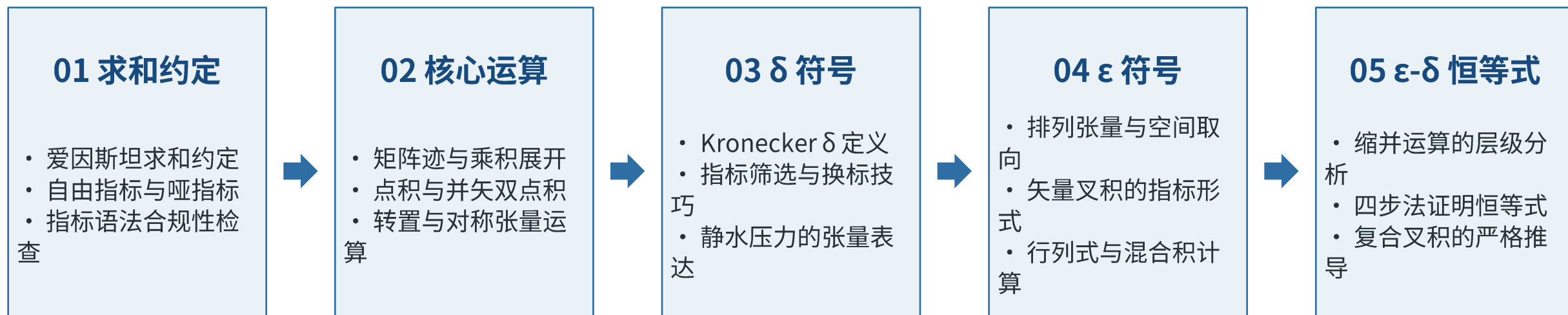
学习目标

- 将显式求和式改写为爱因斯坦求和形式，并能反向展开
- 在复杂乘积中正确标记自由指标和求和指标，区分哑标与自由标
- 熟练运用指标规则，快速诊断并修正张量表达式中的常见错误
- 掌握指标式、矩阵式、矢量式与 python 代码的相互翻译与转换
- 利用克罗内克 δ 化简缩并式；用列维-奇维塔 ϵ 表示叉积与混合积
- 按照标准指标替换流程，严谨证明复合叉积等矢量恒等式

本章核心问题

指标记法将复杂的分量运算压缩为简洁的符号语言，但如何确保其正确性？我们需要掌握：仅通过观察指标的出现次数与位置，如何快速判断表达式是否合法？如何直接从指标结构推断出结果的张量类型？

本章知识结构



核心主线：物理图像构建 → 数学符号精准表达 → 代数规则计算实践 → 连续介质力学工程应用

工程问题导入：为什么需要指标记法？

01 / 张量方程的展开困境

以经典的柯西应力公式为例，即使是描述应力与面力关系的简单本构方程，在笛卡尔坐标系下完全展开也需要书写三个独立的分量方程。当面对四阶弹性张量 (C_{ijkl})、速度梯度或复杂的连续介质控制方程时，传统的全量展开方式会让公式变得极度冗长，不仅占用大量篇幅，更会掩盖物理量之间的本质联系。

完全展开形式（冗余繁琐）

$$t_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3$$

$$t_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3$$

$$t_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3$$

指标记法形式（极简高效）

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

利用爱因斯坦求和约定，单式编码涵盖所有分量与求和循环，直接揭示物理量的映射关系。

💡 **核心洞察：**指标记法不引入新运算，而是将求和结构“编码”在下标规则中，实现公式的极致压缩。

爱因斯坦求和约定

约定

在同一乘积项中，若某一指标恰好出现两次，则默认对该指标的全部取值求和，求和符号可以省略。这一规则是张量分析中简化书写的核心语法。

01. 向量内积的简化

点积展开： $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

按约定省略求和号： $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i$ （指标 i 遍历 1,2,3 并自动求和）

02. 矩阵与矢量的乘法

线性变换： $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j$ （对重复指标 j 求和， i 为自由指标）

解读：结果的第 i 个分量，由矩阵第 i 行与矢量各列相乘后求和得到

。

历史注记

该约定由爱因斯坦在广义相对论的研究中系统引入并推广，凭借其对冗长求和式的极致简化能力，迅速成为理论物理、连续介质力学及张量分析领域的标准语言，被誉为“物理学家的速记法”，极大提升了复杂物理方程的可读性。

本章使用限定

默认采用三维右手笛卡尔直角坐标系，拉丁字母指标 ($i, j, k, \dots$) 取值范围为 $\{1, 2, 3\}$ ，分别严格对应空间直角坐标系的 x 、 y 、 z 三个坐标轴方向。

本书采用的求和规则

- 01 在三维笛卡尔坐标系中，空间指标 $i, j, k \dots$ 取值均为 1, 2, 3；矢量分量 v_i 依次对应坐标轴方向的分量 v_1, v_2, v_3 。
- 02 **自动求和约定：**同一乘积项中，若某指标恰好成对出现（两次），则默认对该指标从 1 到 3 求和，无需写出求和符号 Σ 。
- 03 **自由指标规则：**若指标在乘积项中仅出现一次，称为自由指标，**不求和**。此时等式需对该指标的所有取值（1,2,3）均成立。
- 04 **禁止三重复：**同一指标在单个乘积项中**严禁出现三次或更多次**，此类表达式无物理意义，是初学者最易犯的书写错误。
- 05 **显式声明例外：**若需对非重复指标求和，或刻意不对重复指标求和时，必须显式写出求和符号或附加文字说明，避免歧义。

⚠ **关键注意：**规则仅适用于由“+”或“-”分隔的每一个单项，而非对整行公式的指标次数做笼统统计，请务必逐项检查！

求和指标（哑指标）：内部求和变量

定义： 在一个乘积项中出现两次、且仅出现两次的指标被称为求和指标，也称作“哑指标（Dummy Index）”或缩并指标，其本质是隐含对该指标所有维度的遍历求和。

核心性质与换名规则

- **占位符特性：** 哑指标仅代表求和过程，字母本身无意义，可任意替换（如 $u_i v_i = u_j v_j$ ）。
- **关键约束：** 换名时不可与同项中的**自由指标**重名，也不可使两个独立的求和指标合并为同一个字母，否则会破坏运算逻辑。

⚠ 典型错误：指标冲突

例： $A_{ij} B_{jk} C_k$ 中 j 、 k 是独立哑指标，可写为 $A_{im} B_{mn} C_n$ ，但绝不可将 j 、 k 都改为 m （会变成 $A_{im} B_{mm} C_m$ ，导致指标 m 出现四次，违背求和规则，造成数学意义上的混乱）。

💡 程序思维：循环变量类比

```
# 模拟哑指标求和（向量点积）
total = 0.0
for loop_var in range(3):
    total += u[loop_var] * v[loop_var]
```

本质解读：

代码中的循环变量 `loop_var` 就是数学中的“哑指标”。无论将其改名为 i 、 j 还是 `temp`，它都只是一个用于遍历的临时占位符，完全不影响最终的求和结果。这正是“哑指标”名称的由来——它是一个“哑巴”变量，本身无实际值。

自由指标：结果分量的标签

01 / 核心定义

在张量方程的任意单项中，只出现**一次**且不参与求和过程的指标，被称为“自由指标”。它的每一个取值都代表一个独立的分量方程，决定了最终结果的维度属性。

02 / 典型示例解析

方程 $y_i = A_{ij}x_j$ 中，指标*i*是自由指标（仅出现一次），指标*j*是哑指标（成对出现）。*i*取 1, 2, 3 时分别对应三个独立的代数方程，构成了向量 y 的三个分量。

自由指标数 = 张量阶次（记忆法则）

- 0个自由指标 → **标量**(如： $u_i v_i$ ，点积结果)
- 1个自由指标 → **矢量**(如： $A_{ij}x_j$ ，矩阵乘向量)
- 2个自由指标 → **二阶张量**(如： $A_{ik}B_{kj}$ ，矩阵乘法)

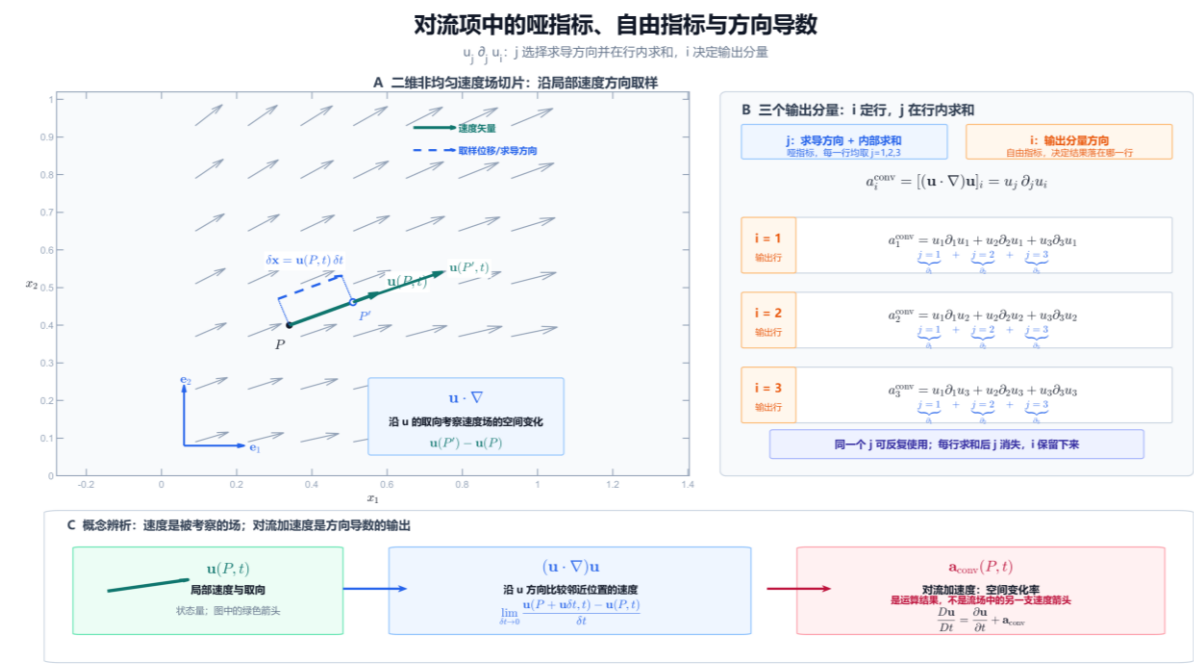
计算机视角：程序循环的类比

```
# 初始化结果向量（对应自由指标的空间）
y = [0.0, 0.0, 0.0]
# i: 自由指标 = 外层循环（决定输出位置）
for i in range(3):
    y[i] += A[i][j] * x[j] # j: 哑指标 = 内层求和
```

核心映射逻辑：

自由指标就像程序中的**外层循环变量**或输出数组的索引，它控制着结果的维度和具体位置；而哑指标则是负责内部累加的循环变量，计算结束后会被“收缩”掉，不会出现在最终结果的维度中。

概念辨析：对流加速度的指标结构



$$a_i^{(\text{conv})} = u_j \partial_j u_i = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

❖ **自由指标 (i):** 标识输出加速度的三个独立分量 (x/y/z方向), 决定了方程的矢量维度与物理意义

○

❖ **哑指标 (j):** 代表对三个坐标方向的遍历求和, 求和后指标消失, 体现了空间导数的叠加与耦合效应。

对流项 $u_j \partial_j u_i$ 的几何与指标结构: 图示直观呈现了非均匀速度场中, 局部速度梯度沿流线方向的投影关系。

物理本质: 算子 $u_j \partial_j$ 即速度与梯度的点积 ($\mathbf{u} \cdot \nabla$), 描述了质点沿速度方向的“空间变化率加权”, 是流体力学中描述输运与扩散效应的基础语言。

课堂互动 1：指标角色识别

不展开求和，直接判断下列表达式中的自由指标和哑指标，并说出结果类型（标量/矢量/二阶张量）。

01表达式： $A_{ij}B_{jk}C_k \rightarrow$ 指出自由指标与哑指标，并判断结果是标量、矢量还是二阶张量？

02表达式： $\sigma_{ij}n_j \rightarrow$ 自由指标是哪个？该运算结果作为张量，在三维空间中有多少个分量？

03表达式： $u_j \partial_j u_i \rightarrow$ 若将式中所有的 j 替换为 i ，此操作是否合规？请简述核心原因。

互动 1 参考答案

01. 表达式 $A_{ij}B_{jk}C_k$ 解析

自由指标为 i （仅出现1次，决定结果维度）；哑指标为 j 、 k （各出现2次，分别独立求和）。运算结果为矢量（保留1个自由指标），需注意 j 和 k 是两个独立的求和循环，不可合并混淆。

02. 表达式 $\sigma_{ij}n_j$ 解析

自由指标为 i ，哑指标为 j 。结果为矢量，含3个分量（ $i=1,2,3$ ），对应经典的柯西应力公式 $t_i = \sigma_{ij}n_j$ ，描述了作用在任意斜面上的应力矢量与应力张量、单位法向量的关系。

03. 误区警示： $u_j \partial_j u_i$ 中把 j 改成 i ？

绝对不可！ 替换后变为 $u_i \partial_i u_i$ ，指标 i 出现3次，违反“同一指标在同一项中出现次数不能 ≥ 3 次”的铁律。哑指标换名时，新名称必须是未被使用的“空闲”指标，严禁与现有自由指标或其他哑指标冲突。

💡 **核心口诀：** 出现 1 次 = 自由指标，出现 2 次 = 哑指标（求和），出现 ≥ 3 次 = 非法！

张量方程的指标语法检查（上）

01 规则一：每个乘积项中的哑指标必须恰好出现两次

✓ **正例：** $A_{ij}x_j$ （哑指标 j 恰好出现两次）
符合爱因斯坦求和约定，哑指标成对出现完成缩并，运算逻辑自洽。

✗ **反例：** $A_{ii}x_i$ （哑指标 i 出现三次）
标准约定下无明确数学定义，无法确定缩并方式，属于语法错误。

02 规则二：等式两端及加减项的自由指标必须完全一致

✓ **正例：** $T_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$ （自由指标均为 i, j ）
等式左右及每一项的自由指标集合完全匹配，保证了张量的阶数和物理维度一致。

✗ **反例：** $y_i = A_{ij}B_{jk}x_k + C_{im}$ （自由指标不匹配）
第一项仅含自由指标 i ，第二项含 i 和 m ，指标集合不同，违背张量运算的基本法则。

💡 **核心洞察：**语法检查是指标运算的“编译器”——不合法的表达式在物理上没有意义，是推导中首要排查的逻辑错误。

张量方程的指标语法检查（下）

规则三：同一等式两端的自由指标可以整体改名，但不能只改一侧

✓ 合法操作：整体替换

$y_i = A_{ij}x_j \Leftrightarrow y_k = A_{kl}x_l$ （两端同步改名，保持平衡）

✗ 语法错误：单边修改

$y_i = A_{kj}x_j$ （左端自由指标为i，右端为k，语义矛盾）

标准合规性自查三步法

01 逐项计数

统计每一项中各指标出现的频次，区分哑指标与自由指标的基础分布。



02 哑指标审计

确保哑指标在单项内严格出现且仅出现两次，杜绝奇数次出现的非法形式。



03 自由指标匹配

核对等式左右两端及加减分项的自由指标完全一致，确保维度平衡。

课堂互动 2：语法诊断

判断下列表达式是否符合爱因斯坦求和约定？若不合格，指出违反哪条规则。

① $C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$

② $v_i = T_{ii}u_i$

③ $A_{ik}B_{kl}C_{lm}x_m + D_{im}x_n = y_i$

④ $\epsilon_{ijk}u_jv_k = \delta_{ij}w_j$

核心运算（一）：迹

$$tr(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{ii}$$

其中 i 为哑指标，代表对矩阵主对角线上的分量进行求和，运算结果为一个标量（不变量）

01. 小应变张量 ε

ε_{ii} 是体积应变的一阶近似，直接描述了微元体体积的相对变化率，是衡量几何变形中体积胀缩的核心量。

02. 速度梯度 $L_{ij} = \partial_j v_i$

$L_{ii} = \partial_i v_i$ 即速度散度，表征流场中流体微团的体积随时间的变化率，是流体力学中判断压缩性的关键指标。

03. 应力张量 σ

σ_{ii} 是应力张量的第一主不变量，对应静水压力的大小，是影响材料体积变化和屈服准则的重要因素。

重要提示： 尽管数学形式都是对角求和，但不同物理张量的“迹”含义截然不同。切勿将所有矩阵的迹都简单等同于“体积膨胀”，必须结合具体的物理背景（变形、运动或力的平衡）进行解读。

核心运算（二）：二阶张量与矢量的乘积

01 通用数学形式：线性变换的表达

$$y_i = A_{ij} x_j$$

- 自由指标 i ：决定输出矢量 y 的分量方向，对应结果的维度
- 哑指标 j ：对输入矢量 x 的分量求和，实现维度缩并，体现线性叠加性

02 工程实例：柯西应力定理 (Cauchy's Formula)

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$$

- σ_{ij} ：二阶应力张量（变换规则），描述点的应力状态
- n_j ：面元法向矢量（输入）， t_i ：面力矢量（输出），将“方向”映射为“力”

运算本质：线性映射的“黑箱”模型



输入：矢量 x (几何量)

包含3个独立的方向与大小分量，作为变换的“初始原料”，不改变物理维度。



核心：张量 A (变换规则)

由9个分量构成的“系数矩阵”，定义了如何对输入矢量进行缩放、旋转与重组，是映射的灵魂。



输出：矢量 y (结果量)

经过线性变换后得到的新矢量，其分量值由爱因斯坦求和约定自动完成计算，保持矢量特性。

💡 **关键总结**：二阶张量不仅是一个数组，更是连接两个矢量的“线性变换算子”。这种“输入-变换-输出”的结构是描述固体力学变形与受力的基石。

核心运算（三）：转置、对称与反对称

01 转置运算

若 $B_{ij} = A_{ji}$
则 $B = A^T$

核心定义：交换张量两个指标的位置。这是后续所有对称性质讨论的基础。

02 对称张量

$$A_{ij} = A_{ji}$$

物理实例：应力张量、应变张量
独立分量：6个（3个对角项 + 3个非对角项）

03 反对称张量

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

关键特性：对角分量必为零
独立分量：3个（对应角速度等轴矢量）

核心洞察：指标顺序不是书写习惯，而是有物理含义——交换指标对应转置操作，直接决定了张量在物理空间中的变换行为。

核心运算（四）：矩阵乘法



图2-2 矩阵乘法 $C_{ik}=A_{ij}B_{jk}$ 中自由指标与哑指标的作用示意图。图示直观展示了“行乘列”的对应关系与求和过程。

$$C_{ik} = A_{ij}B_{jk}$$

01 指标角色辨析

哑指标 j (求和指标)

负责“行乘列”的内部累加，求和后该指标在结果中消失，遵循爱因斯坦求和约定。

自由指标 i, k (定位指标)

决定结果矩阵 C 的具体位置： i 对应行号， k 对应列号，遍历所有组合生成完整矩阵。

02 实例展开：C₁₂ 的计算

固定 $i=1, k=2$ ，对 j 求和： $C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32}$
即：矩阵 A 的第 1 行与矩阵 B 的第 2 列对应元素相乘再相加。

💡 运算口诀：先定位置（自由指标），后算累加（哑指标）。

核心运算（五）：点积与双点积

01. 矢量点积 (Dot Product)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$$

运算本质：上下指标完全消去，结果为**标量**，描述两个矢量的投影关系与相似度。

02. 二阶张量双点积 (Double Dot)

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$$

运算本质：两个指标同时缩并求和，结果为**标量**。若张量对称，可简化为 $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})$ 。

运算规则与结果维度对比

运算形式	指标记法 (Einstein求和)	结果类型与物理意义
矢量点积 ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$)	$a_i b_i$ (单指标缩并)	标量 (0自由指标) - 能量/投影
矩阵乘法 ($\mathbf{A}\mathbf{B}$)	$A_{ij} B_{jk}$ (单指标缩并)	二阶张量 (2自由指标) - 变换

概念辨析： $A_{ij}A_{ij}$ 与 $A_{ij}A_{ji}$ 不是同一种缩并

01. 分量平方和： $A_{ij}A_{ij}$

$$\begin{aligned} &= A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 \\ &= \|A\|_F^2 = \text{tr}(A^T A) \quad (\text{结果恒非负}) \end{aligned}$$

本质是矩阵的 Frobenius 范数平方，所有元素各自平方后累加，不涉及交叉项。

02. 转置配对和： $A_{ij}A_{ji}$

$$\begin{aligned} &= A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2 + 2(A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{23}A_{32}) \\ &= \text{tr}(A^2) \quad (\text{矩阵自乘后的迹}) \end{aligned}$$

涉及非对角元素的交叉乘积项，结果依赖于矩阵的对称性，可能出现负值。

12 34 直观反例： 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

计算得： $A_{ij}A_{ij} = 0^2 + 1^2 + 0^2 + (-2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 3^2 = 14$
而 $A_{ij}A_{ji} = 0 + (1 \times -2) + 0 + (-2 \times 1) + 0 + 0 + 0 + 0 + 9 = 5$

💡 关键结论：二者仅在矩阵对称 ($A=A^T$) 时才相等。切勿仅凭“指标重复”就混淆缩并方式，必须严格检查指标的上下标配对顺序，这是张量运算中极易出错的关键点。

工程例题 2-1：线弹性应变能密度的指标展开

工程案例：在线弹性、小应变条件下，应变能密度为 $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ 。完全展开该式，并说明张量剪应变与工程剪应变的关系。

解答前先审计（四问）

01 指标类型判定：无自由指标（ i, j 均为哑指标），遵循爱因斯坦求和约定，结果为确定数值。

02 物理量本质：二阶张量的双点积运算，缩并后降为零阶张量（标量），符合能量密度的物理意义。

03 展开规模预估：三维空间下指标取1,2,3，共 $3 \times 3 = 9$ 项，包含正应力应变积与剪应力应变积。

04 对称性简化：应力与应变张量均对称（ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ），非对角项成对相等，最终仅保留6类独立分量。

课堂互动：补全展开式第一项 $\rightarrow \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{12} \epsilon_{12} + \underline{\hspace{2cm}} + \sigma_{21} \epsilon_{21} + \sigma_{22} \epsilon_{22} + \cdots$ （提示：按指标顺序 $i=1$ 时， j 遍历 1,2,3）

工程例题 2-1 解答：从九项到六类独立分量

01. 应变能密度的完全展开形式

$$W = \frac{1}{2} [\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33} \\ + \sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{21}\epsilon_{21} + \sigma_{13}\epsilon_{13} + \sigma_{31}\epsilon_{31} \\ + \sigma_{23}\epsilon_{23} + \sigma_{32}\epsilon_{32}]$$

利用本构对称性 ($\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$, $\epsilon_{ij}=\epsilon_{ji}$) 合并同类项，消去冗余指标：

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33}) \\ + \sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{13}\epsilon_{13} + \sigma_{23}\epsilon_{23}$$

02. 工程剪应变的因子2约定

为符合工程习惯，定义工程剪应变为张量剪应变的2倍：

$$\gamma_{12} = 2\epsilon_{12}, \quad \gamma_{13} = 2\epsilon_{13}, \quad \gamma_{23} = 2\epsilon_{23} \\ (\text{其中 } \tau_{ij} \text{ 代表工程剪应力, 数值上 } \tau_{ij} = \sigma_{ij})$$

代入后得到便于工程计算的形式：

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33} + \tau_{12}\gamma_{12} + \tau_{13}\gamma_{13} + \tau_{23}\gamma_{23})$$



易错点警示：指标记法中(i,j)和(j,i)是两项，工程剪应变已含因子2。切勿混淆张量剪应变 ϵ_{ij} 与工程剪应变 γ_{ij} ，需严格区分系数。

数字赋能 02-A：利用 NumPy 验证求和约定

运行前预测（输出形状）

指标表达式	预测输出 (3维空间下)
$ij, j \rightarrow i$	长度为 3 的一维矢量 (Vector)
$ij, jk \rightarrow ik$	3×3 二维矩阵 (Matrix)
$ij, ij \rightarrow (\text{空})$	标量 (Scalar, 单一数值)
$ijk, j, k \rightarrow i$	长度为 3 的一维矢量 (Vector)

einsum 核心语法机制

`np.einsum(subscripts, *arrays)`

- 逗号分割输入：区分不同数组的维度指标
- 箭头指向输出：明确保留的维度，无则为标量
- 隐式求和：仅在输入中出现的重复指标自动求和

经典场景解析

'ij,jk->ik': 标准矩阵乘法，收缩 j 轴

'ij,ij->': 矩阵点积（Frobenius内积）

'ii->': 求矩阵的迹（Trace）

计算思维养成：先通过指标逻辑推导输出形状，再运行代码验证。这是将抽象数学符号转化为具体计算逻辑的关键训练，拒绝盲目编写代码。

数字赋能 02-A：核心代码与结果验证

关键代码（节选）

```
# 1. 小矩阵手算验证：直接核对数值
A, B = np.arange(1,5).reshape(2,2),
np.arange(5,9).reshape(2,2)
C_einsum = np.einsum('ij,jk->ik', A, B) # 爱因斯坦求和
# 2. 广义运算对比：范数与迹
norm_sq = np.einsum('ij,ij->', A, A) # Frobenius范数平方
trace_AA = np.einsum('ij,ji->', A, A) # 矩阵平方的迹
```

验证结果与结论

- ✓ **结果一致：** einsum 计算结果与 Python 内置 @ 运算符完全吻合。
- ✓ **非交换性：** $AB \neq BA$ ，矩阵乘法顺序直接决定结果差异。
- ✓ **双点积交换律：** $A:B = B:A$ ，内积运算不随矩阵顺序改变。
- ✓ **范数非负性：** $A_{ij}A_{ij} = \|A\|_F^2 \geq 0$ ，仅当 A 为零矩阵时取等。

💡 核心逻辑解读

einsum 的本质是“指标约定”：箭头右侧定义输出维度，仅在输入侧出现的重复指标会被自动求和。这统一了从矩阵乘法到张量收缩的多种运算形式。

应用窗口一：功与功率

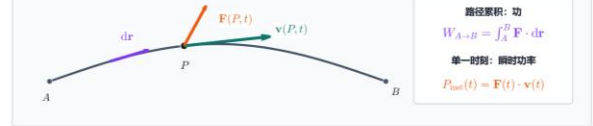
力与速度夹角、瞬时功率符号及功的路径积分

功是沿路径的累积量；瞬时功率由同一时刻的力与速度点积决定

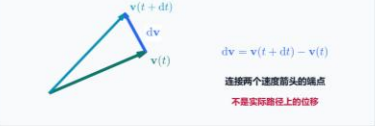
A 同一点：夹角决定瞬时功率的符号



B 曲线路径：功是累积量，功率是瞬时量



C 速度空间：dv 是速度矢量的增量



D 五个量的角色不可互换

位移增量 $d\mathbf{r}$ $d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)$ 位置空间中的小位移	速度 $\mathbf{v}$ $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ 某时刻的运动速度	速度增量 $d\mathbf{v}$ $d\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + dt) - \mathbf{v}(t)$ 速度空间中的矢量差	瞬时功率 P_{inst} $P_{\text{inst}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 单位时间做功，标量	功 W $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 沿路径累积的标量
---	--	---	--	--

力与速度夹角对瞬时功率符号的影响：夹角 θ 决定功率正负，路径决定功的累积效应。

01 微元功与路径积分

微元功： $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_i dx_i$

总功： $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ （沿路径C对力场进行线积分）

$$\text{瞬时功率 } P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dW}{dt} = F_i v_i$$

$P > 0$ ($\theta < 90^\circ$)

力做正功，向系统输入机械能，表现为加速或储能。

$P = 0$ ($\theta = 90^\circ$)

力与速度正交，仅改变方向不做功（如圆周运动）。

$P < 0$ ($\theta > 90^\circ$)

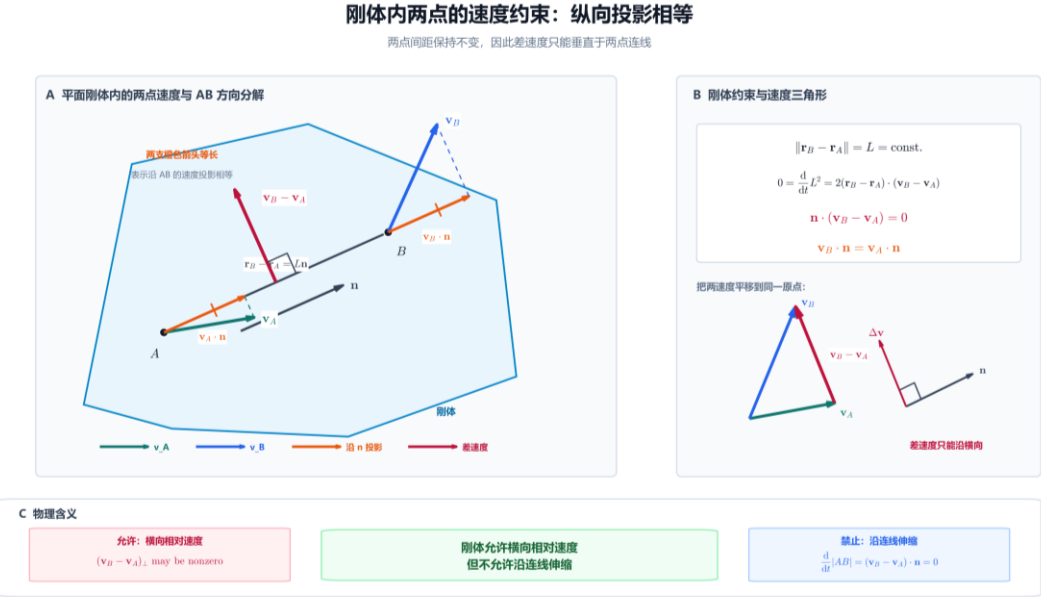
力做负功，系统向外输出能量，表现为减速或耗能。



概念辨析：切勿混淆 $d\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $d\mathbf{v}$

$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{v}$ 不是功率公式！ $d\mathbf{r}$ 是位移元， $\mathbf{v}$ 是速度矢量， $d\mathbf{v}$ 是速度增量，三者物理意义与量纲完全不同，混淆会导致根本性错误。

应用窗口二：刚体速度投影约束



刚体内两点A、B的速度投影约束示意图，展示了速度矢量在连线上的分量关系。

设刚体上两点 A、B 的位矢差为 $\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}^B - \mathbf{r}^A$ ，单位方向矢量为 $\mathbf{n}$ 。由刚体运动学，两点速度满足 $\mathbf{v}^B - \mathbf{v}^A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}$ 。由于叉乘结果垂直于 $\mathbf{r}_{BA}$ ，两边点乘 $\mathbf{n}$ 后，转动项被消去，从而得到核心约束方程。

$$\mathbf{v}^A \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^B \cdot \mathbf{n}$$

指标形式： $(v_i^B - v_i^A)n_i = 0$

物理本质：这是刚体“不可伸长”的数学表达。两点间的相对速度仅由绕连线的转动引起，沿连线方向无相对运动分量，保证了刚体内部距离守恒。

💡 延伸：该约束不适用于可变形体，其相对速度由速度梯度张量（含变形与旋转）决定，详见第4章。

微分算子预览：为什么 ∂_i 不是普通标量

01 普通标量分量：代数交换律成立

标量分量（如 A_{ij} , B_{jk} , x_k ）本质是数值，遵循乘法交换律：

- ① 分量与变量自由交换： $A_{ij}x_j = x_jA_{ij}$
- ② 张量分量间可交换： $A_{ij}B_{jk} = B_{jk}A_{ij}$

02 微分算子 ∂_i ：不可随意交换！

∂_i 是**求导运算符号**，非数值，作用对象必须明确：

⚠ 关键区别：

- 遵循乘积法则： $\partial_i(fg) = f\partial_i g + g\partial_i f$
- 不可交换： $f\partial_i \neq \partial_i f$ （前者是算子，后者是对 f 求导）

重要示例：标量场的全微分

$$d\phi = (\partial\phi/\partial x_i)dx_i = \partial_i\phi \, dx_i = \nabla\phi \cdot d\mathbf{x}$$

i 为哑指标，代表梯度分量与位移增量的缩并

核心意义解析：

这不仅是多元函数的链式法则，更是标量场在局部邻域内的一阶线性近似。它将微分算子的作用具体化，展示了指标记法如何简洁地描述复杂的微分关系。

✦ 后续预告：第4章将系统探讨梯度、散度、旋度中微分算子的指标运算规则。

阶段小结：指标记法的核心能力

01 识别

自由指标决定输出结构
哑指标实现内部缩并
阶次 = 自由指标数量

02 审计

哑指标必须成对出现
等式两端自由指标一致
加减项结构严格匹配

03 运算

迹、矩阵乘与点积规则
双点积与转置的表达
缩并方式定义物理含义

04 翻译

指标式 $\leftrightarrow$ 矩阵显式
指标式 $\leftrightarrow$ 矢量分量
兼容 einsum 现代记法

接下来引入两个特殊符号 δ_{ij} 和 ε_{ijk} ，它们是化简指标表达式、揭示张量对称性的核心数学工具，也是连接代数与几何的桥梁。

2.2

克罗内克 δ 符号

单位张量、筛选与换标

Kronecker Delta — The Identity Tensor and Index Substitution

克罗内克 δ 符号：定义与几何意义

01 / 代数定义：分段张量分量

数学表达： $\delta_{ij} = 1$ （当 $i = j$ ，主对角线元素）； $\delta_{ij} = 0$ （当 $i \neq j$ ，非对角线元素）。

物理本质：它是二阶单位张量 I 在笛卡尔正交坐标系下的分量表达，是张量分析中最基础的符号之一。

01 / 几何直观：基矢的正交归一性

正交基矢量的内积法则： $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ 。

几何解读：相同基矢量点积为1（体现归一性，即模长为1），不同基矢量点积为0（体现正交性，即相互垂直），这是欧氏空间度量的核心。

02 / 矩阵表示（三维空间）

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注： n 维空间对应 n 阶单位矩阵，仅主对角元为1，其余为0。

02 / 缩并性质：连接空间维数

指标缩并求和： $\delta_{ii} = n$ （ n 为空间维数）。

三维实例： $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ （易错点：不是1，而是维度总数）。

这是简化矢量与张量运算的关键恒等式。

核心认知： δ_{ij} 并非传统意义上的“数值函数”，而是**单位张量 I** 的分量符号，它是连接代数运算与几何度量的桥梁，为后续学习各向同性张量奠定基础。

δ 的核心作用：筛选与换标

01 筛选性质

$$\delta_{ij}u_j = u_i$$

展开验证： $\delta_{ij}u_j = \delta_{i1}u_1 + \delta_{i2}u_2 + \delta_{i3}u_3$ 。对任意给定的自由指标 i ，克罗内克函数 δ_{ij} 仅在 $j=i$ 时取 1，其余项均为 0，从而精准“筛选”出与 i 对应的分量。

02 对高阶张量的换标运算

- ① $\delta_{im}A_{mj} = A_{ij}$ （哑标 m 收缩，替换为行标 i ）
- ② $A_{im}\delta_{mj} = A_{ij}$ （哑标 m 收缩，替换为列标 j ）
- ③ $\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}$ （ δ 符号自身的换标与简化）

换标操作三步走：

- 1. 找哑标：识别求和符号中重复出现的指标；
- 2. 做替换：用 δ 的自由指标替换张量中的哑标；
- 3. 消符号：完成替换后直接移除 δ ，简化表达式。

页内即时练习： δ 的化简

不展开求和号，直接利用 δ_{ij} 的筛选与换标作用化简：

01. $\delta_{ij} A_{jk} = ?$

基础型：单因子直接换标

02. $\delta_{ij} A_{ki} = ?$

易错型：注意指标的前后顺序

03. $\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki} = ?$

进阶型：连续换标与维数收缩

解①： A_{ik}

δ_{ij} 将 A_{jk} 中的哑指标 j 替换为 i ，利用筛选性直接消去求和号，结果为 A_{ik} 。

解②： A_{kj}

δ_{ij} 将 A_{ki} 的上标 i 替换为 j ，**注意保持原指标顺序**（ k 在前，被替换的 i 在后），切勿写成 A_{jk} 。

解③： 3

连续换标后得到 δ_{ii} ，在三维空间（如笛卡尔坐标系）中，克罗内克 δ 的迹为 $1+1+1=3$ 。

⚠ 核心警示： 第②题是高频丢分点！ δ 仅进行指标替换，绝不改变张量原有的上下标位置和左右顺序。

δ 的常见缩并汇总

$$\delta_{ii} = 3$$

三维欧氏空间的基础维数因子，是 δ 对自身指标单重缩并的结果，直接对应空间的维度数量。

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$$

双重缩并的特殊恒等式，对两组重复指标分别求和后结果仍为3，体现了单位张量的归一化特性。

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$$

指标传递性缩并，如同单位矩阵的矩阵乘法，消除中间哑指标 j ，直接建立起指标 i 与 k 的一一对应关系。

$$\delta_{ij}A_{ij} = A_{ii} = \text{tr}(\mathbf{A})$$

δ 与二阶张量的双点积等价于求迹运算，即提取张量主对角元素之和，是连接张量缩并与矩阵代数的桥梁。

记忆策略：将 δ 视为“指标置换开关”，其核心作用是把一个指标替换为另一个，反复利用这一规则消除哑指标，即可快速完成复杂张量的化简直觉。

工程例题 2-2：利用 δ_{ij} 化简张量表达式

【题目要求】 化简如下张量表达式，其中 δ_{ij} 为克罗内克符号（Kronecker Delta）：

$$T_i = A_{km} \delta_{mi} x_k + \lambda \delta_{jj} \delta_{ik} x_k$$

01 / 分步化简逻辑拆解

① 第一项：利用 δ 的“换标”特性

哑指标 m 被 δ_{mi} 筛选，直接替换指标： $A_{km} \delta_{mi} x_k = A_{ki} x_k$

② 第二项：缩并($\delta_{jj}=3$) + 筛选($\delta_{ik} x_k = x_i$)

三维空间中 δ_{jj} 求和为 3（维数因子）， δ_{ik} 筛选出 x_i ，得： $3\lambda x_i$

$$\text{最终结果： } T_i = A_{ki} x_k + 3\lambda x_i$$

⚠ 核心易错点与注意事项

1. 警惕矩阵转置误区

$A_{ki} x_k$ 等价于 $(A^T)_{ik} x_k$ ，通常 $\neq A_{ik} x_k$ 。只有当张量 A 是对称张量时，两者才相等。

2. 不可遗漏的维数因子

δ_{jj} 的缩并结果等于空间维数 n （通常 $n=3$ ），这是学生在作业中最容易漏掉的关键常数。

✅ **化简后审计检查：** 等式两端自由指标均为 i （一致性检查通过），结果为一阶张量（矢量），符合物理量纲。

静水压力中的单位张量

01 静止流体应力张量的数学表达

$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ (拉应力为正, 压力 $p > 0$, δ_{ij} 为单位张量)
任意法向 n_j 截面上的面力: $t_i = \sigma_{ij}n_j = -p\delta_{ij}n_j = -pn_i$

💡 核心物理结论

面力始终沿截面内法线的反方向, 且不存在任何切向分量。这一结论揭示了静止流体的本质属性——无法承受剪切力, 一旦存在切向力差, 流体将产生宏观流动, 这也是区分流体与固体力学行为的关键判据。

02 物理图像与工程内涵



各向同性的体现: 静水压力具有旋转不变性, 无论微元体的朝向如何, 所受压强大小始终一致, 这是流体宏观均匀性的直接数学表达。



单位张量的筛选机制: δ_{ij} 如同数学“开关”, 仅保留与法线方向一致的分量, 严格剔除切向效应, 从根本上证明了静止流体无剪力的特性。



工程设计的理论根基: 从深海潜水器的耐压壳体设计, 到核电站冷却系统、液压油缸的强度校核, δ_{ij} 提供了最基础的应力状态描述工具。



课程思政 · 严谨铸就安全: 看似抽象的张量符号, 实则是保障压力容器、深海装备等国之重器安全的“隐形卫士”。工程力学的每一个公式, 都承载着对生命安全的承诺, 是工程师“严谨求实、精益求精”职业素养的基石。

数字赋能：用单位矩阵验证 δ 的换标

01 运行前判断： δ 的运算逻辑

- ① 标量缩并： $\delta_{ii} = 3$ (三维空间迹)
- ② 矢量筛选： $\delta_{ij}u_j = u_i$ (提取分量)
- ③ 矩阵还原： $\delta_{im}A_{mj} = A_{ij}$ (左乘不变)
- ④ 矩阵求迹： $\delta_{ij}A_{ij} = \text{tr}(A)$ (对角线求和)

02 关键代码 (NumPy Einsum)

```
import numpy as np
delta = np.eye(3) # 构建3阶单位矩阵
print(np.einsum('ii->', delta)) # 验证：输出 3
print(np.einsum('ij,j->i', delta, u)) # 验证：输出原矢量 u
print(np.einsum('im,mj->ij', delta, A)) # 验证：输出原矩阵 A
print(np.einsum('ij,ij->', delta, A)) # 验证：输出矩阵的迹
```

03 验证结果反馈

- ✓ 标量验证：输出严格等于 3，符合单位矩阵性质
- ✓ 矢量验证：结果与输入矢量完全一致 (误差 $< 1e-15$)
- ✓ 矩阵验证：输出矩阵与原矩阵逐元素精确匹配
- ✓ 迹验证：结果等于 $\text{np.trace}(A)$ ，符合定义

💡 深度思考：交换次序会改变结果吗？

思考：若写成 $\text{np.einsum}('j,ij->i', u, \text{delta})$ ，结果是否变化？

结论：**完全不变**。因为张量缩并本质是标量分量的相乘与求和，标量乘法满足交换律，因此输入顺序不影响数值结果。

课堂互动 3: δ 化简快答

利用 δ_{ij} 的筛选与换标性质，直接写出化简结果：

01

$$\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl} = ?$$

02

$$\delta_{ij}A_{jk}\delta_{km} = ?$$

03

$$\delta_{ij}\delta_{kl}A_{ik}B_{jl} = ?$$

04

$$(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})A_{jk} = ?$$

δ 符号小节

δ_{ij} = 单位张量的分量 = 指标的“筛选器”和“替换器”

01 筛选机制

$$\delta_{ij}u_j = u_i$$

对求和指标进行精准“过滤”，仅保留与自由指标 i 完全匹配的分量，剔除所有不相关项，是指标运算的基础筛选工具。

02 指标替换

$$\delta_{im}A_{mj} = A_{ij}$$

充当指标的“重命名”工具，将张量中的哑指标 m 直接替换为自由指标 i ，极大简化了张量收缩与代数运算的书写。

03 维数收缩

$$\delta_{ii} = 3 \text{ (三维空间)}$$

当上下指标相同时进行缩并，其结果直接等于空间的维度数，是快速判断空间维度或简化迹运算的关键性质。

接下来引入 ϵ_{ijk} —— 它编码空间取向，是描述叉积和反对称结构的核心工具。

2.3

列维-奇维塔 ε 符号

空间取向、叉积与反对称结构

Levi-Civita Symbol — Orientation, Cross Product and Antisymmetry

ε 符号：定义与完全反对称性

01 / 数学定义（右手正交基下）

+1 偶排列：当 (i,j,k) 为 $(1,2,3)$ 的偶置换时（如 123, 231, 312），保持正号。

-1 奇排列：当 (i,j,k) 为 $(1,2,3)$ 的奇置换时（如 132, 213, 321），符号取反。

0 重复指标：若任意两个指标相同（如 112, 233），分量直接为零。

💡 特征： $3^3=27$ 个位置中，仅6个非零分量，具有高度稀疏性。

02 / 核心性质：完全反对称性

✖ 交换变号

任意交换两个指标，符号翻转：

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}$$

🔄 循环不变

指标循环移位，符号保持：

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$$

⚠ 重要推论：对称张量的缩并湮灭

若 $S_{jk} = S_{kj}$ (对称张量)，则 $\varepsilon_{ijk} S_{jk} \equiv 0$

证明：交换哑指标 j,k ， S 保持不变，而 ε 变号，等式两边互为相反数，故只能为零。这是证明应力张量对称性的关键。

排列判断卡 + 即时练习

01 偶排列（循环移位）

序列：(123) $\rightarrow$ (231) $\rightarrow$ (312)

结果判定：+1

02 奇排列（逆序变换）

序列：(132) $\rightarrow$ (321) $\rightarrow$ (213)

结果判定：-1

03 存在重复指标

特征：任意两个指标相同 (如 112)

结果判定：0

⚡ 快速判断挑战

① $\varepsilon_{312} = ?$ ② $\varepsilon_{231} = ?$ ③ $\varepsilon_{232} = ?$

④ $\varepsilon_{132} = ?$ ⑤ $\varepsilon_{321} = ?$ ⑥ $\varepsilon_{112} = ?$

参考答案：+1 , +1 , 0 , -1 , -1 , 0

💡 记忆口诀：先查重复定零值，循环移位得正一，其余逆序皆为负。

叉积的指标表达

叉积的分量形式可通过列维-奇维塔符号 (ϵ) 转化为简洁的代数语言，将几何运算转化为指标运算：

$$W_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

指标语义解析

自由指标 (i): 决定输出向量 w 的分量方向 (如 w_1, w_2, w_3)，在等式两侧仅出现一次。

哑指标 (j, k): 遵循爱因斯坦求和约定，遍历 1,2,3 并累加，公式中成对出现，名称可随意替换。

展开示例 (i=1): $w_1 = \epsilon_{123}u_2v_3 + \epsilon_{132}u_3v_2 = u_2v_3 - u_3v_2$
同理可得 $w_2 = u_3v_1 - u_1v_3$, $w_3 = u_1v_2 - u_2v_1$ (符合右手定则)

代数证明：反交换性 $v \times u = -(u \times v)$

1. 定义展开: $(v \times u)_i = \epsilon_{ijk} v_j u_k$
2. 反对称性: $= -\epsilon_{ikj} v_j u_k$ (交换 j,k, ϵ 变号)
3. 哑指标重命名: $= -\epsilon_{ijk} u_j v_k$ ($k \leftrightarrow j$, 求和不变)
4. 回归定义: $= -(u \times v)_i$

核心结论: 叉积的反交换性本质上是列维-奇维塔符号反对称性的直接体现，无需依赖几何直观即可严格推导。

力学中的统一反对称结构

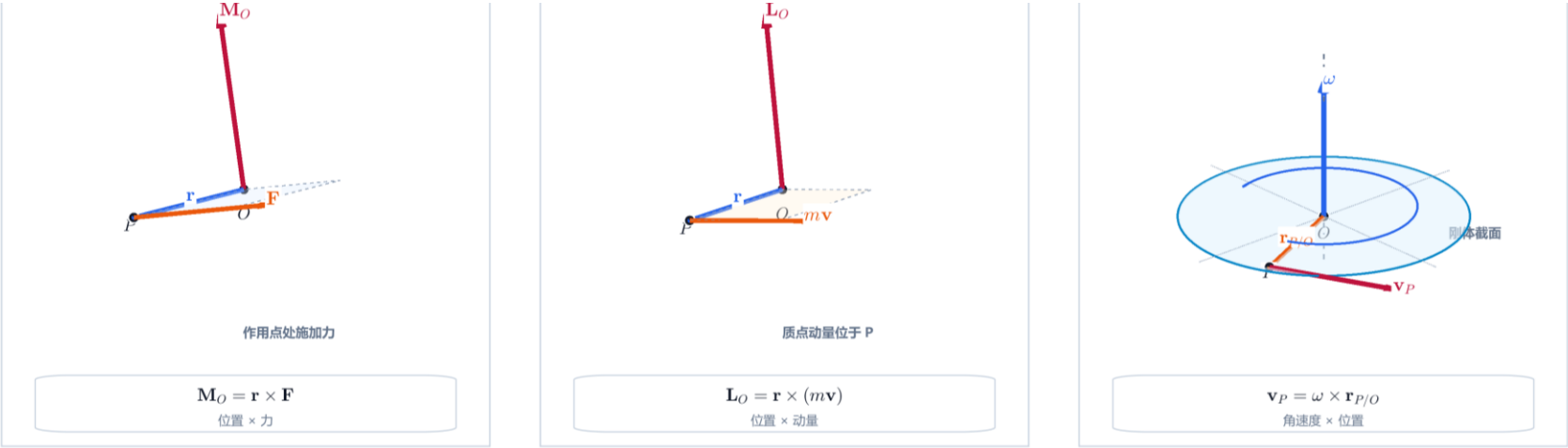


图2-5 三类常见叉积力学关系：力矩、角动量、刚体转动速度

物理关系	矢量形式	指标形式
力对点O的力矩	$M_O = r \times F$	$M_i = \varepsilon_{ijk} r_j F_k$
质点对点O的角动量	$L_O = r \times (mv)$	$L_i = \varepsilon_{ijk} r_j mv_k$
刚体点P的速度	$v_P = v_O + \omega \times r_{P/O}$	$v_i^P = v_i^O + \varepsilon_{ijk} \omega_j (r_{P/O})_k$

三者共享同一代数骨架 $c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ 。 ε 统一编码了三维反对称耦合、空间取向和轴矢量结构。

拓展辨析：极矢量与轴矢量

极矢量 (Polar Vector)

描述物理量空间指向的基础矢量，遵循直观的几何变换规则，直接对应位移、速度等可观测的方向量。

 典型实例：位置 r · 速度 v · 力 F · 电场 E

坐标旋转

分量按投影规则线性变换，符合直觉的方向改变。

镜像反射

垂直镜面的分量反向变号，平行分量保持不变。

轴矢量 (Axial Vector)

又称“赝矢量”，由两个极矢量叉乘产生，描述旋转的轴线方向与旋向，与坐标系的“手性”紧密相关。

 典型实例：力矩 M · 角动量 L · 角速度 ω · 磁场 B

坐标旋转

变换规律与极矢量完全一致，数学形式无差别。

镜像反射

整体多出一个负号（即方向不变），表现出伪矢量特性。

 **核心启示：** 置换符号 ϵ_{ijk} 本质是“定向”的度量，它统一了叉积的反对称数学结构，但其存在不改变物理量的极性类别。这种极性差异在分析物理定律的客观性（如本构关系）时至关重要，也是理解张量代数几何意义的关键。

基矢量叉积与标量三重积

01 基矢量叉积：置换符号的几何根基

利用克罗内克 δ 与置换符号的缩并性质，基矢量叉积可简化为：

$$(e_m \times e_n)_i = \epsilon_{ijk} \delta_{jm} \delta_{kn} = \epsilon_{imn}$$

由此直接导出核心关系式： $e_m \times e_n = \epsilon_{mni} e_i$

右手坐标系验证：

正序： $e_1 \times e_2 = e_3, e_2 \times e_3 = e_1, e_3 \times e_1 = e_2$

反序： $e_2 \times e_1 = -e_3$ （体现置换符号的全反对称性）

02 标量三重积：代数形式与几何意义的统一

定义式（混合积）：

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k$$

这是连接张量代数运算与空间几何度量的关键纽带。

◆ 空间手征性

$J > 0$ 为右手取向， $J < 0$ 为左手取向，反映坐标系旋向。

◆ 几何体积度量

$|J|$ 等于由 u, v, w 构成的平行六面体的几何体积值。

◆ 线性相关性

若 $J=0$ ，则三矢量共面（线性相关），体积退化为0。

◆ 理论应用基础

是雅可比行列式、体积元变换及场论分析的核心工具。

标量三重积与有向体积



标量三重积与有向体积：遵循右手螺旋定则的矢量排列为正取向（ $J > 0$ ）；任意交换两个矢量的顺序，会导致空间取向翻转，体积符号变为负（ $J < 0$ ），直观体现了置换的反对称性。

01 几何直观：体积的“方向”

以 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 张成的平行四边形为底面，面积矢量为 $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ 。矢量 $\mathbf{u}$ 在该面积矢量方向上的投影决定了“高度”。标量三重积 $J = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ 的绝对值是平行六面体的体积，其符号则严格对应三个矢量的右手螺旋取向。

02 代数本质：行列式与置换符号

若矩阵 $A = [\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}]$ （列向量），则 $\det(A) = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$ 。完全反对称符号 ε_{ijk} 在此处将矢量的叉乘运算转化为矩阵的行列式，建立了几何体积与代数行列式的严格等价关系。

03 物理延伸：雅可比行列式的意义

在坐标变换中，雅可比 J 刻画了局部体积的伸缩比例。其符号至关重要：正号表示保持右手系（保向），负号表示镜像翻转（反向），这是描述变形梯度与体积守恒的基础。

工程例题 2-3：航天器姿态动力学中的陀螺项

工程案例 · 航空航天

在航天器刚体姿态动力学中，旋转运动受惯性张量与角速度的耦合影响。核心物理量定义如下：

1. 刚体角动量： $H_k = I_{k\ell}\omega_\ell$ （Einstein求和约定）
2. 陀螺耦合力矩： $\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}$

任务要求：将陀螺力矩用指标记法展开，并验证指标的平衡关系。

指标合规性审计

1. 角动量公式 $H_k = I_{k\ell}\omega_\ell$ ：
 - ✓ 指标 ℓ 重复出现（哑指标，隐含求和）， k 为自由指标，符合规则。
2. 叉积展开式 $M_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j H_k$ ：
 - ✓ 指标 j, k 为哑指标（双重求和）， i 为自由指标，指标平衡成立。

01 数学推导过程

利用 Levi-Civita 符号表示叉积 $(a \times b)_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k$ ，代入角动量公式：

第一步： $M_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j H_k$

第二步：替换 H_k 得展开式：

$M_i = \varepsilon_{ijk}I_{k\ell}\omega_j \omega_\ell$ 式中 j, k, ℓ 为哑指标， $i = 1, 2, 3$ 代表三个坐标轴方向。

02 物理本质与工程启示

陀螺项本质上是关于角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的二次非线性项，它将不同轴向的角速度分量通过惯性张量耦合在一起。这是姿态控制系统中最棘手的非线性因素之一。在工程实践中，若忽略此项，当航天器处于高速旋转或姿态机动时，控制误差将急剧增大，甚至导致姿态失稳。精确的数学建模是航天任务成功的基石。

工程例题 2-3 解答：主惯性轴下的陀螺力矩

【前提设定】 若动坐标系与刚体主惯性轴重合，惯性张量退化为对角矩阵： $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$

此时动量矩分量简化为： $H_1 = I_1 \omega_1$ ， $H_2 = I_2 \omega_2$ ， $H_3 = I_3 \omega_3$ 。（注： $I_1/I_2/I_3$ 为各轴主惯性矩的标量值，非指标分量形式）

M_1 分量解析

$$M_1 = (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3$$

由绕2、3轴的角速度耦合产生，其值取决于垂直轴间的惯性矩差值。

M_2 分量解析

$$M_2 = (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1$$

体现绕3、1轴的惯性耦合效应，揭示了刚体绕多轴转动时的动力学耦合本质。

M_3 分量解析

$$M_3 = (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2$$

反映刚体惯性分布的非对称性，是引起旋转机械动不平衡的关键因素之一。



记法说明：本书严格遵循爱因斯坦求和约定，不采用“ $I_k \delta_{kl}$ ”等易导致指标混淆的特殊记法。主惯性矩统一使用无下标的独立符号 I_1, I_2, I_3 表示，确保张量运算的数学严谨性，避免同一指标在项中出现三次的语法错误。

数字赋能 02-C：构造 ϵ_{ijk} 并验证叉积

01 / 运行前的理论预测

- ϵ 张量形状应为三维 (3,3,3)
- 缩并 j,k 后输出长度为 3
- 几何上对应右手螺旋定则
- 若 $u=v$, 结果必为零向量
- 交换 u,v 结果整体变号
- 仅6个非零分量(± 1)

02 / 手动构造与爱因斯坦求和实现

```
# 1. 初始化全零的3阶张量
epsilon = np.zeros((3,3,3), dtype=int)
# 2. 赋值6个非零的反对称分量
epsilon[[0,1,2],[1,2,0],[2,0,1]] = 1 # 偶排列
epsilon[[0,2,1],[2,1,0],[1,0,2]] = -1 # 奇排列
# 3. 核心：直接对应公式  $w_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$ 
w = np.einsum('ijk,j,k->i', epsilon, u, v)
```

03 / 结果验证与解读

- ✓ **数值一致性**：计算结果与 `np.cross(u, v)` 输出完全一致，误差为0。
- ✓ **自叉积归零**：验证了 $u \times u = 0$ ，体现了相同向量无垂直分量的几何本质。
- ✓ **反对称性**：严格满足 $v \times u = -(u \times v)$ ，验证了 ϵ 符号的置换性质。
- ✓ **下标映射**：数学指标 (1,2,3) 到 Python 索引 (0,1,2) 的转换准确无误。

💡 **核心洞察**：Levi-Civita 符号的完全反对称性是叉积“垂直性”与“定向性”的代数根源。通过手动构造而非直接调用库函数，我们深刻理解了“黑盒”背后的张量运算逻辑。

2.4

ϵ - δ 恒等式与复合叉积

将反对称符号的缩并转化为克罗内克符号的组合

Epsilon-Delta Identity — The Master Key for Compound Cross Products

ϵ - δ 基本恒等式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \begin{vmatrix} \delta_{j\ell} & \delta_{jm} \\ \delta_{k\ell} & \delta_{km} \end{vmatrix} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell}$$

指标说明：重复指标 i 遵循爱因斯坦求和约定（隐式求和），缩并后剩余 j, k, ℓ, m 为自由指标

01. 记忆技巧：二阶行列式模型

等式右侧可视为由克罗内克 δ 构成的二阶行列式展开，直观对应行与列的指标关联：

$$\begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

02. 全指标推广：三阶行列式形式

当所有指标均为自由指标时，恒等式呈现为三阶行列式，体现置换符号的反对称性：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

核心提示：此恒等式是证明所有矢量恒等式（如 bac-cab 公式）的基石，必须熟练默写。

ε - δ 恒等式层级卡

01 缩并1个指标 → 4个自由指标

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

核心基石：用于展开矢量三重积 $A \times (B \times C)$ ，是电动力学、流体力学中场方程化简的核心工具。

02 缩并2个指标 → 2个自由指标

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$$

关键推论：证明“无旋场”性质（旋度的散度为零），推导 $\nabla \times (\nabla \times A)$ 展开式的关键步骤。

03 缩并3个指标 → 0个自由指标(纯量)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

数值结论：三维空间中 Levi-Civita 符号的全缩并结果，对应 $3!$ （3的阶乘），即6个非零分量的平方和。

💡 **记忆心法：**无需死记硬背！掌握层级1的基础公式后，层级2与3可通过对指标赋值并求和（缩并）直接推导得出。

使用 ε - δ 恒等式的四步法

①

找共同指标

识别两个 ε 符号中重复出现的哑指标，锁定需要进行缩并与对齐的核心目标。

②

对齐位置

通过循环移位或指标对换，将共同指标移至相同位置。牢记：循环移位不变号，相邻对换改变符号。

③

套标准式

应用核心恒等式 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ ，将符号积转化为克罗内克 δ 函数的代数组合。

④

δ 换标并审计

利用 δ 函数的筛选性质完成指标替换与化简，最后严格检查等式两端的自由指标是否完全一致。

✎ 实战演练：化简 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$

锁定共同指标 k ，其在第一式中为第三位，第二式中为第一位。利用循环移位性质 $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ （循环移位不变号），将原式转化为 $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}$ 。此时共同指标 k 对齐，直接套用标准式可得结果： $\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ 。

例一： 矢量三重积（BAC-CAB） 证明

 **证明目标：** 推导向量恒等式 $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ ，即经典的“BAC-CAB”记忆法则。

Step 1	定义展开： 设结果为 W_i ，利用叉积的置换符号定义展开第二层叉积： $W_i = \epsilon_{ijk} A_j (B \times C)_k = \epsilon_{ijk} A_j (\epsilon_{klm} B_l C_m)$
Step 2	指标对齐： 利用置换符号的循环不变性 $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ ，将公共哑标 k 前置，便于应用恒等式： $W_i = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m$
Step 3	恒等式化简： 代入 ϵ - δ 恒等式 $\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ ，利用 δ 函数换标： $W_i = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})A_j B_l C_m = (A_j C_j)B_i - (A_j B_j)C_i$

结论： $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ （即 BAC-CAB 法则）

向量三重积的物理意义与易错点

物理意义

向量三重积 $A \times (B \times C)$ 的结果严格落在由向量 B 和 C 所张成的平面内，其本质是 B 和 C 的线性组合，体现了向量运算的平面约束性。

 **分量解构：**结果由两项组成： $(A \cdot C)B$ 沿 B 方向（权重为 A 与 C 的点积）， $-(A \cdot B)C$ 沿 C 方向（权重为负的 A 与 B 的点积），二者合成即为最终向量。

 **几何诠释：**该运算相当于“剔除”了向量 A 中垂直于 B - C 平面的分量，只保留 A 在该平面内的投影效应，是降维投影与线性组合的结合。

 **记忆口诀：“BAC - CAB” 法则**——将公式拆解为： $B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$ ，记住“ B 在前， C 在后，中间是减号”，可快速验证符号是否正确。

高频易错点警示

01. 结合律完全不成立！

$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ 。前者结果在 B - C 平面，后者在 A - B 平面，强行结合会导致维度与方向全部错误。

02. 符号极易写反（最常见）！

正确式： $(A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ 。
典型错解： $(A \cdot B)C - (A \cdot C)B$ （注意中间是减号）。

03. 指标运算时的错位混淆

在张量指标记法中，易忽略 Levi-Civita 符号的循环移位规则，直接套用公式会导致哑标与自由标的对应关系错误。

课堂互动 4：拉格朗日恒等式（半完成推导）

 本次推导目标：证明矢量混合积恒等式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

01. 左侧表达式展开（指标形式）

将叉乘转换为置换符号 ε 的形式：

$$\text{LHS} = (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) (\varepsilon_{ilm} C_l D_m)$$

合并后得到：

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} A_j B_k C_l D_m$$

（观察：两个 ε 的第一个哑标均为 i ，已对齐）

02. 关键思考与填空挑战

请按“四步法”小组讨论并补全：

1. 确认：共同指标为 i ，属于缩并 1 个指标的情况。
2. 调用： ε - δ 恒等式的第一层级公式。
3. 填空： $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl})$
4. 代入：将上式代入，利用 δ 符号化简点积。

 课堂提示：注意第二项的负号位置及指标的正确配对，这是初学者最容易出错的地方。完成后，请尝试将结果与右侧的目标公式进行比对。

拉格朗日恒等式解答 + 数字赋能 02-D

01. 基于 ε - δ 恒等式的代数推导

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

将混合积 $(A \times B) \cdot (C \times D)$ 按定义展开，利用上述恒等式进行指标缩并。首项产生 $(A \cdot C)(B \cdot D)$ ，次项产生 $(A \cdot D)(B \cdot C)$ ，符号由置换的奇偶性决定。

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$$

02. SymPy 符号级代码验证

```
from sympy import LeviCivita, symbols
A, B, C, D = symbols('A B C D', cls=Vector)
lhs = 0
for i,j,k,l,m in range(3):
    lhs +=
    LeviCivita(i,j,k)*LeviCivita(i,l,m)*A[j]*B[k]*C[l]*
    D[m]
print(simplify(lhs - rhs)) # 输出: 0
```



符号残差 = 0

数学级精确等价，非数值近似



结构自治性

交换叉乘顺序，结果自动变号

💡 核心价值：代码未调用现成的 cross 函数，而是通过五重循环严格还原了指标求和的数学定义，直观展示了符号运算的底层逻辑。

课堂互动 5: ϵ - δ 恒等式应用判断

判断下列化简是否正确，若错误请改正：

01

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{il}$ ，该等式是否成立？

💡 提示：先对齐共同指标的位置，利用置换符号的双层级缩并规则进行验证，注意哑指标的循环置换性质。

02

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ ，该等式是否成立？

💡 提示：共同哑指标 k 在第三位已对齐，直接套用 ϵ - δ 一级缩并公式（行列式展开形式）即可得出结果。

03

$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ 可以用 ϵ - δ 恒等式证明吗？（ ϕ 为标量场）

💡 提示：将旋度用置换符号展开为分量形式 $[\nabla \times (\nabla \phi)]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi$ ，结合偏导连续性与 ϵ 的反对称性分析。

本章核心问题回收

指标记法把多个分量方程压缩成一行，但压缩后的公式是否仍然正确？

只要依次检查三点，就能判断压缩后的指标表达式是否合法：



01 自由指标

决定张量的输出结构与阶次，是公式的“骨架”，需在等式两侧对称出现。



02 求和指标 (哑指标)

仅在单一项内成对出现，代表对该维度进行遍历求和，实现维度的内部缩并。



03 指标平衡法则

等式两端及所有加减项，必须拥有完全一致的自由指标集合，这是合法性的关键。

指标记法不是“省略写法”，而是一套严谨、可检验的数学语法系统。

核心概念回顾

01 爱因斯坦求和约定

同一乘积项中指标若恰好出现两次，即代表对该指标在取值范围内自动求和，可省略传统的求和符号。

02 自由指标 vs 哑指标

自由指标是方程的“输出标签”，代表方程对任意方向成立；哑指标是内部求和的“占位变量”，仅在求和时起作用。

03 指标运算三规则

运算合法性的基石：哑指标必须成对出现；等号两侧自由指标必须严格匹配；指标名称可整体替换（换名不换义）。

04 克罗内克 δ 符号

单位二阶张量的分量形式，核心功能是“指标筛选”与“换标”，在三维空间中，其对角元缩并结果恒为3。

05 列维-奇维塔 ε 符号

三阶完全反对称张量，编码空间的取向与手性，是表达矢量叉积、矩阵行列式及旋量运算的核心数学符号。

06 ε - δ 恒等式

连接点积与叉积的代数桥梁，将 ε 的反对称性与 δ 的筛选性结合，是证明复合矢量恒等式的关键工具。

这六个核心概念构成了连续介质力学的“数学语法基础”，是理解后续张量分析、应力应变关系及本构方程的必要前提。

关键公式回顾（含物理关系）

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i \rightarrow$ 内积/投影（标量），刻画矢量投影关联与长度度量基础。

$y_i = A_{ij} x_j \rightarrow$ 张量映射矢量（柯西公式），描述线性变换对物理矢量的映射。

$C_{ik} = A_{ij} B_{jk} \rightarrow$ 矩阵/张量乘法，体现线性变换的复合与物理量的层级运算。

$\mathbf{A}:\mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} \rightarrow$ 张量双点积，对应应变能密度等关键物理标量的计算。

$\text{tr}(\mathbf{A}) = A_{ii} \rightarrow$ 张量的迹，反映体积变化率、惯性矩等系统的不变量特征。

$\delta_{ij} u_j = u_i \rightarrow$ 克罗内克 δ 筛选性，实现指标替换与降维的核心运算工具。

$\delta_{ii} = 3 \rightarrow$ 三维空间的维数约定，笛卡尔坐标系下的关键缩并结果。

$\mathbf{W}_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k \rightarrow$ 置换张量叉积，精准描述力矩、角速度与角动量的轴向关系。

$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \rightarrow$ ϵ - δ 恒等式，矢量三重积与旋度运算证明的核心数学工具。

$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6 \rightarrow$ 完全缩并，三维空间下的固定数值，用于简化复杂求和计算。

💡 核心要点：公式不仅是符号的堆砌，更是物理规律的数学表达，理解指标的“哑标求和、自由标变化”是掌握张量运算的关键。

物理图像回顾：本章最关键的三幅图

对流项的指标结构

核心： $u_j \partial_j u_i$ 中， j 是哑指标（负责方向导数求和）， i 是自由指标（决定输出分量）。这是理解流体随体变化的关键。

教学价值：直观区分“沿速度方向的空间变化率”与“速度本身的时间变化”，建立场论的物理直觉。

矩阵乘法的指标角色

核心： $C_{ik} = A_{ij} B_{jk}$ 中， i 和 k 锁定输出矩阵的位置， j 负责内积配对。这是线性变换复合的代数表达。

教学价值：对应计算机程序的“双重循环”逻辑：外层遍历自由指标，内层遍历哑指标，理解计算的层级结构。

标量三重积与有向体积

核心： $\varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k$ 是三个矢量张成的平行六面体的“有向体积”。完全反对称张量 ε 编码了空间的取向。

教学价值：将抽象的“置换符号”转化为直观的“几何体积”，理解雅可比行列式的符号如何记录空间的翻转。

 **核心心法：**数学表达 $\leftrightarrow$ 几何图像 $\leftrightarrow$ 物理意义 三者必须建立一一对应的直觉联系，拒绝孤立记忆公式。

能力目标回顾与高频易错点

学完本章你能做什么？

- ✓ 熟练进行显式求和与爱因斯坦求和约定的互译转换
- ✓ 准确诊断张量指标表达式的书写合法性与维度匹配性
- ✓ 利用克罗内克 δ 符号快速化简各类张量缩并表达式
- ✓ 灵活运用列维-奇维塔 ϵ 符号表示叉积与反对称运算
- ✓ 掌握“四步法”严谨证明复合叉积等张量恒等式
- ✓ 独立使用NumPy/SymPy工具验证指标运算的正确性

最容易混淆什么？

- ✗ 缩并位置误区： $A_{ij}A_{ij} \neq A_{ij}A_{ji}$ ，注意上下指标配对
- ✗ 哑指标冲突：换名时若与自由指标重名会导致符号歧义
- ✗ δ 替换陷阱： $\delta_{ij}A_{ki} = A_{kj}$ 而非 A_{jk} ，警惕转置错误
- ✗ 算符特性： ∂_i 是矢量微分算符，不可与标量随意交换
- ✗ ϵ - δ 恒等式：应用前必须严格对齐上下指标位置再替换
- ✗ 应变差异：张量剪应变 ϵ_{ij} 与工程剪应变 γ_{ij} 差1/2因子

形成性评价 1：指标语法与缩并诊断

评价目标——检查学生能否建立“数学表达—几何图像—物理意义”的深度关联，夯实张量运算的基础逻辑。

01 语法规合规性诊断

判断表达式 $T_{ij} = A_{ik}B_{kj} + C_{ijkl}D_{kl}$ 是否合法？若判定为不合法，请指出自由指标与哑指标的匹配错误点，并给出修正后的正确表达式。

 核心考察：指标平衡规则与语法纠错

02 缩并运算与意义辨析

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，分别计算 $A_{ij}A_{ij}$ 与 $A_{ij}A_{ji}$ 的数值结果，并结合张量代数说明这两种缩并方式对应的几何与代数含义（如矩阵范数、迹等）。

 核心考察：缩并方式与几何物理意义

03 对称性代数推导证明

利用指标记法的变换性质严格证明：对称张量 S_{ij} （满足 $S_{ij}=S_{ji}$ ）与反对称张量 W_{ij} （满足 $W_{ij}=-W_{ji}$ ）的双点积恒为零，即 $S:W = 0$ 。

 核心考察：对称性利用与代数推导

 建议独立思考与完成

形成性评价 2：工程情境与计算验证

01 工程情境分析：流体力学中的指标运算

给速度场分布：

$$u_1 = ax_1x_2, \quad u_2 = bx_1^2, \quad u_3 = cx_3$$

请完成以下推导与辨析：

- (a) 写出对流加速度 $a_i^{(conv)} = u_j \partial_j u_i$ 的指标形式，指出式中的自由指标与哑指标；
- (b) 针对 $i = 1$ 分量完全展开，计算得到 $a_1^{(conv)}$ 的具体代数表达式；
- (c) 试说明 $u_i \partial_j u_j$ 为何是一种与对流加速度完全不同的矢量运算。

02 计算预测：Einsum 符号与物理意义

阅读下方 NumPy 中的 einsum 张量运算代码，预测输出结果的张量形状，并阐述其对应的数学或物理含义：

- (a) ``np.einsum('ij,jk->ik', A, B)``
- (b) ``np.einsum('ij,ij->', A, B)``
- (c) ``np.einsum('ijk,j,k->i', ε, u, v)`` （其中 ε 为置换张量）
- (d) ``np.einsum('ii->', A)``

 建议分组讨论 |  建议结合 Python 环境运行验证结果

课后任务

01 基础巩固（必做）

- 习题2.1：张量指标语法诊断（6小题）
- 习题2.3：连续 δ 符号的缩并运算练习
- 习题2.6：置换张量 ϵ 的缩并性质证明

 **核心目标：** 彻底掌握哑标与自由标规则，消除指标运算的常见语法错误，夯实理论基石。

02 能力提升（选做）

- 习题2.9：对称与反对称张量的正交性证明
- 习题2.10：由角动量平衡推导应力对称性
- 习题2.14：SymPy验证矢量三重积恒等式

 **进阶目标：** 建立抽象指标运算与物理守恒律的联系，初步尝试利用数学软件辅助力学推导。

03 综合探究（挑战）

- 习题2.16：对称张量的压缩存储与编程实现
- 习题2.17：镜像变换下叉积的数值实验分析
- 习题2.21：二阶缩并的数值结果与几何差异

 **挑战目标：** 融合编程思维解决力学问题，探索指标记法在工程数值模拟中的实际应用价值。

下章衔接：从指标记法到张量变换

本章建立了什么

- 固定笛卡尔坐标系下的指标运算与求和约定
- 掌握 δ (克罗内克)与 ε (置换符号)的核心运算规则
- 熟练进行指标表达式的化简、语法检查与证明
- 利用符号工具推导复合叉积等矢量恒等式

思考留白：若坐标系发生旋转或非线性变换，这些物理量的分量将遵循何种规律变化？

第3章 预告：张量的定义性特征

- 坐标变换的数学描述与张量的变换法则
- 极矢量与轴矢量在变换下的根本差异辨析
- 各向同性张量的性质与材料对称性的关联
- 张量识别利器：商法则 (Quotient Rule)
- 重温 δ 与 ε 在变换下的特殊行为

关键转折：从“分量的代数运算”迈向“物理量的几何不变性本质”

核心隐喻：指标记法是描述张量的“语法规则”，而坐标变换法则才是张量的“定义与灵魂”。下一章，我们将正式回答：究竟什么才是真正的张量？

谢谢

指标记法是连续介质力学的语法，准确是它的第一美德

徐翱 景泽 编著 | 张量分析与连续介质力学